

# Homework #3 Solutions

2.1

5.

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 3R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Switch } R_2 + R_3 \\ R_2 - R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 + 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & -13 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 / -13} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$z = -2 \quad y - 4(-2) = 10 \Rightarrow y = 2 \quad x + 2 + 2(-2) = -1 \Rightarrow x = 1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$b) \text{ from part a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 + 4R_3 \\ R_1 - 2R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

7.

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Switch } R_2 + R_3 \\ R_3 - R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-1 \cdot R_3 \\ R_1 - R_3 \\ R_2 - R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Switch } R_1 + R_2 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_3 \\ R_1 - R_3 \\ R_1 - R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Switch } R_1 + R_2 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - 5R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_3, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ -2r \\ r \end{bmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$$

$$d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad x_3 = 0, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2r \\ r \\ 0 \end{bmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$$

8. a)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{-1/7 \cdot R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 - 3R_3 \\ R_1 - 2R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$x_1 + x_4 = 1$   
 $x_4 = 1 - x_1$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 2 \\ 1 \\ 1-r \end{bmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$$

b)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 - R_1 \\ R_2 + R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 + R_2 \\ -1 \cdot R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\substack{R_1 - 3R_3 \\ R_1 - R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$x_1 = 1 - x_4$        $x_2 = 2 + x_4$   
 $x_3 = -1 + x_4$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-r \\ 2+r \\ -1+r \\ r \end{bmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$$

9. a)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & 1 & 4 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 - R_1 \\ R_5 - 2R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & -1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{-1/3 \cdot R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 + R_2 \\ R_4 - 2R_2 \\ R_5 + 3R_2 \\ R_5 - 2R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\substack{\text{switch } R_2 \\ + R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\substack{R_1 - 2R_2 \\ R_1 - R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_4 - 2R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 + R_3 \\ \text{switch } R_2 + R_3 \\ \text{switch } R_3 + R_4}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_3 + 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$x_3 = 0, x_2 = 0, x_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$12. \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 & | & 0 \\ 1 & -3 & 1 & | & 0 \\ 4 & -4 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Switch  $R_2 + R_1$   
 $R_2 + 2R_1$   
 $R_3 - 4R_1$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 1 & | & 0 \\ 0 & 8 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} -4x_2 + x_3 &= 0 \\ \Rightarrow x_3 &= 4x_2 \end{aligned}$$

$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \\ r \\ 4r \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} r \in \mathbb{R} \\ r \neq 0 \end{aligned}$$

Z.2 2 a)  $E_2(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b)  $E_{43}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

c)  $E(1,3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8.  $\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_3 - R_1 \\ 1/2 \cdot R_2}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$

$\xrightarrow{\substack{R_2 - 3/2 R_3 \\ R_1 - 3R_3}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & -3/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. a)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  singular

b)  $\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 + 2R_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{1/2 \cdot R_2 \\ R_1 - 3R_2}} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1/6 & 1/12 \end{array} \right]$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 1/6 & 1/12 \end{bmatrix}$$

c)  $\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\text{Switch } R_1 + R_2 \\ R_2 - R_1}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_3 - R_2 \\ R_2 - R_3 \\ R_1 - 2R_3}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$

$\xrightarrow{R_1 - R_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d_1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Switch} \\ R_1+R_2 \\ R_2-R_1}]{R_3-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Singular}$$

$$10. a_1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3-2R_1 \\ R_4-3R_1}]{R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & -1 \\ 0 & -4 & 7 & 3 \\ 0 & -5 & 7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2+R_3 \\ R_3-11R_4}]{R_4+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+4R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-11R_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{singular}$$

$$b_1) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-R_1}]{R_1-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-1/2 \cdot R_3 \\ R_2-2R_3}]{R_3-2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 5/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3/2 & 5/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$c_1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Switch} \\ R_1+R_2 \\ R_3+R_1}]{R_2-R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3-R_1}]{R_2-R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{1/2 \cdot R_3 \\ R_2-3R_3}]{1/2 \cdot R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$d_1) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3-R_1}]{R_1-R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{1/5 \cdot R_3 \\ R_3+R_2}]{R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 1/5 & 7/5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2-2R_3 \\ R_1-R_2}]{R_2-2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/5 & -3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 1/5 & 7/5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -3/5 & -1/5 \\ 2/5 & 3/5 & -4/5 \\ -1/5 & 1/5 & 7/5 \end{bmatrix}$$

2.3

2. a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3-2R_1 \\ R_4-2R_1 \\ R_5-5R_1}]{R_2-5R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 7 & -23 \\ 0 & -3 & 6 & -5 \\ 0 & -4 & 3 & -6 \\ 0 & -9 & 7 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3-R_4}]{R_5-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 7 & -23 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_4+4R_3 \\ 1/6 \cdot R_5}]{R_2+9R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 34 & -14 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

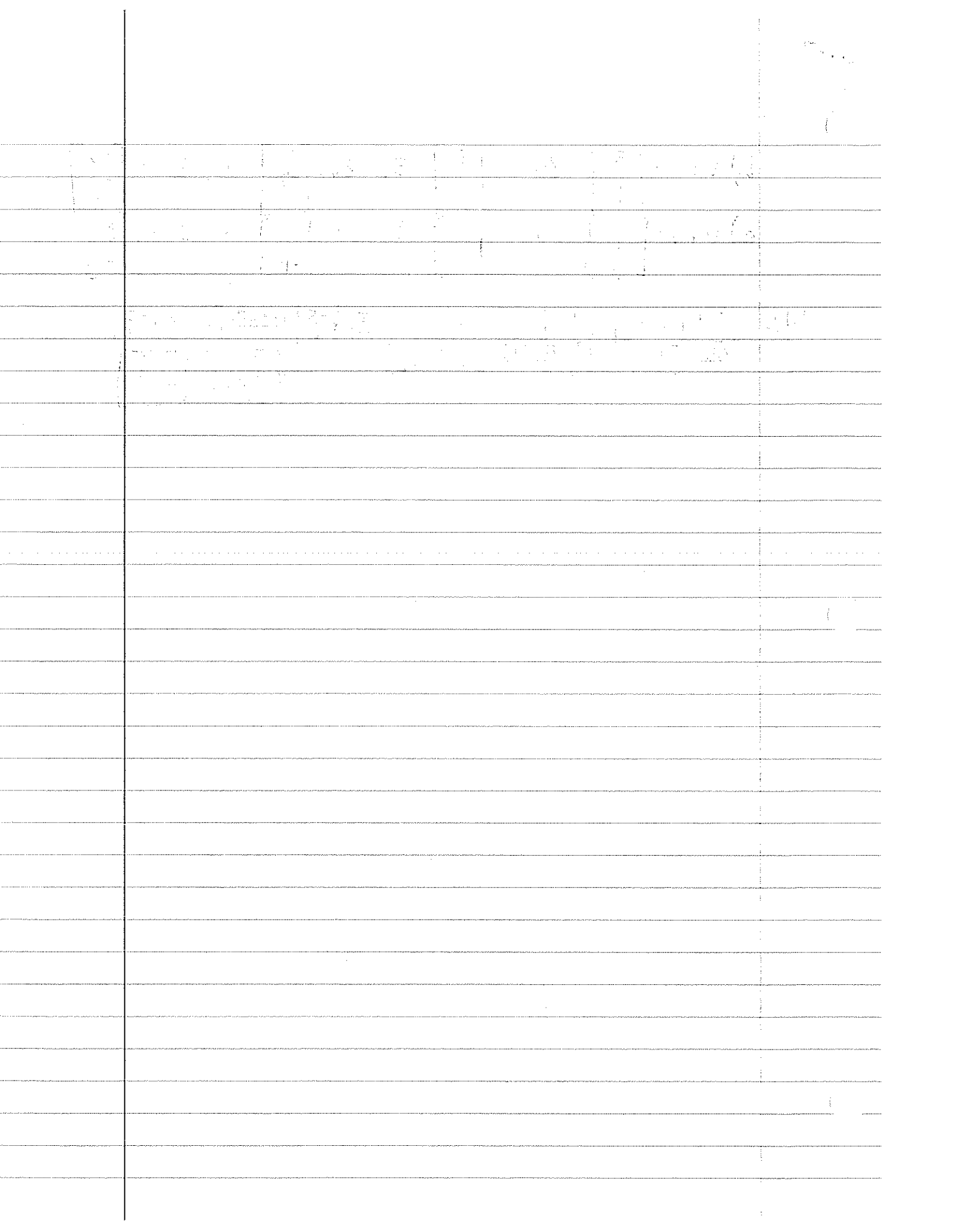
$$\xrightarrow[\substack{\text{Switch} \\ R_2+R_3 \\ R_4+R_5}]{R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 34 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Switch } R_4+R_5} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4$$

$$b.) \quad U+V = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 2U-V = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 11 \end{bmatrix} \quad 3U-2V = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 18 \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}-3V = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$c.) \quad U+V = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad 2U-V = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix} \quad 3U-2V = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -11 \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}-3V = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$16. \quad c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -5 \\ -2 & -4 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2+2R_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \end{array} \right]$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1-3R_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$
$$\boxed{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}$$



$$b.) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 2R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-1 \cdot R_2 \\ R_3 + 3R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$$\boxed{[I_3]}$$

$$c.) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 - R_2 \\ \frac{1}{7} \cdot R_2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{C_3 - C_1 \\ R_1 + 2R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} I_2 & \begin{matrix} 0 & 21 \\ 0 & 11 \end{matrix} \end{bmatrix}}$$

$$d.) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \\ 7 & 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 - 7R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -10 & 0 & -3 \\ 0 & -8 & 5 & -9 \\ 0 & -18 & 5 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 - R_4 \\ R_2 + R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 5 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Switch } R_2 + R_3 \\ \text{Switch } R_3 + R_4}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\frac{1}{10} \cdot R_2 \\ -\frac{1}{3} \cdot R_4}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 + 18R_2 \\ R_3 + 9R_4}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5} R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[I_4]}$$

$$3. a.) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 - R_2 \\ R_2 - 3R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2} \cdot R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{C_2 - 2C_1 \\ C_3 - 3C_1 \\ C_4 + C_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{C_3 - \frac{1}{2}C_2 \\ C_4 + 2C_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} I_2 & \begin{matrix} 0 & 22 \\ 0 & 12 \end{matrix} \end{bmatrix}}$$

$$b.) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 5 & 6 & 4 \\ 5 & 8 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Switch } R_1 + R_2 \\ R_2 - 3R_1 \\ R_3 - 5R_1 \\ R_4 - 5R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -4 & 14 \\ 0 & -2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 - 2R_2 \\ R_4 - R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Switch } R_3 + R_4 \\ \frac{1}{2} \cdot R_3, -\frac{1}{2} \cdot R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} I_3 \\ 0_{13} \end{bmatrix}}$$

$$6. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Switch } R_1 + R_2 \\ E(12)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ E_{21}(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 - R_2 \\ E_{32}(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{C_3 - C_2 \\ E_{23}(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{C_3 - C_1 \\ E_{13}(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 - C_1 \\ E_{12}(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & D_{2,1} \\ D_{1,2} & D_{1,1} \end{bmatrix} \quad \text{To get from A to B, row and column operations must be performed in order}$$

$$B = E_{32}(-1) \cdot E_{21}(-1) \cdot E(1,2) \cdot A \cdot E_{23}(-1) \cdot E_{13}(-1) \cdot E_{12}(-1)$$

$$P = E_{32}(-1) \cdot E_{21}(-1) \cdot E(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

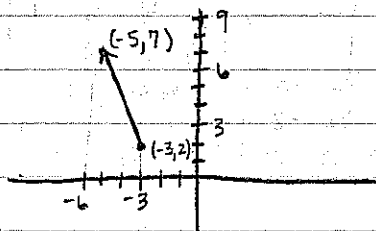
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{(multiple possibilities)}$$

$$Q = E_{23}(-1) \cdot E_{13}(-1) \cdot E_{12}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{(multiple possibilities)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = PAQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1 2.  $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$



$(-5, 7)$  is the head of the vector

6.  $\begin{cases} 2a-b = -2 \\ a-2b = 2 \\ a+b-2c = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 6 \end{array}$

$\frac{1}{2} \cdot R_1 \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 0 & -1 \\ 0 & -3/2 & 0 & 3 \\ 0 & 3/2 & -2 & 7 \end{array} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{array} \xrightarrow{-2/3 \cdot R_2} \begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{array} \xrightarrow{R_1 + 1/2 R_2} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{array} \xrightarrow{-1/2 \cdot R_3} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

12. a)  $U+V = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad 2U-V = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad 3U-2V = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad 0-3V = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$